# Programa TRES para la enseñanza de la Trigonometría Esférica

Mª Carmen Morillo y José Fábrega
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA TOPOGRÁFICA Y CARTOGRAFÍA
UNIVERSIDAD POLITÉCNICA DE MADRID

**Resumen**

*Se presenta la metodología utilizada en el desarrollo de un programa que permite calcular todos los elementos de un triángulo esférico conociendo previamente tres elementos de dicho triángulo, así como el cálculo de la distancia esférica entre dos puntos de la esfera. Además, se incluye la dirección para la obtención de dicho programa.*

**Abstract**

*Here, we introduce the methodology used in the development of a program which allows to calculate all items of a spherical triangle, previously knowing three items of such triangle, as well as the calculation of the spherical distance between two points of the sphere. The web site to obtain this program is also included.*

## 1. INTRODUCCIÓN

Dada la tendencia actualmente vigente en la enseñanza de intentar que el alumno asuma la responsabilidad en su proceso de formación, hay que dotarle de aquellas herramientas que le permitan el autoaprendizaje. En este sentido va orientado el trabajo presentado. El objetivo fundamental del artículo consiste en describir un programa que permite calcular los elementos de un triángulo esférico, es decir, sus tres lados y sus tres ángulos.

El desarrollo metodológico parte del conocimiento de tres elementos de un triángulo.

Los teoremas que se utilizan para la elaboración del programa son los siguientes:

- *Teorema del coseno para lados:*

$$\cos a = \cos b \cdot \cos c + \operatorname{sen} b \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos A$$
$$\cos b = \cos a \cdot \cos c + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} c \cdot \cos B$$
$$\cos c = \cos a \cdot \cos b + \operatorname{sen} a \cdot \operatorname{sen} b \cdot \cos C$$

Nota: a, b y c (minúscula) representa los lados del triángulo esférico y en mayúscula se representan los ángulos opuestos respectivos.

- *Teorema del seno:*

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\operatorname{sen} A} = \frac{\operatorname{sen} b}{\operatorname{sen} B} = \frac{\operatorname{sen} c}{\operatorname{sen} C}$$

- *Teorema del coseno para ángulos:*

$$\cos A = -\cos B \cdot \cos C + \operatorname{sen} B \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos a$$
$$\cos B = -\cos A \cdot \cos C + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} C \cdot \cos b$$
$$\cos C = -\cos A \cdot \cos B + \operatorname{sen} A \cdot \operatorname{sen} B \cdot \cos c$$

- *Analogías de Neper:*

$$\operatorname{tg}\frac{c}{2} = \frac{\cos\frac{A+B}{2}}{\cos\frac{A-B}{2}} \cdot \operatorname{tg}\frac{a+b}{2}$$

Se trabajará con ángulos sexagesimales por ser las unidades habituales en trigonometría esférica.

También se necesita saber las condiciones matemáticas para poder construir un triángulo esférico (necesarias para que exista el triángulo), las cuales son:

- Cualquier lado o ángulo de un triángulo verifica:

$$0^{\circ} < a < 180^{\circ}; \quad 0^{\circ} < A < 180^{\circ}$$

- Cualquier lado de un triángulo esférico es menor que la suma de los otros dos y mayor que la diferencia, es decir:

$$|a - b| < c < a + b$$

- La suma de los ángulos de un triángulo esférico verifica:

$$180^{\circ} < A + B + C < 540^{\circ}$$

- La suma de los lados de un triángulo esférico verifica:

$$0^{\circ} < a + b + c < 360^{\circ}$$

- En un triángulo esférico se verifica: $a = b \Leftrightarrow A = B$
- En un triángulo esférico se verifica: $a > b \Leftrightarrow A > B$

Nota: a, b y c (minúscula) representa los lados del triángulo esférico y en mayúscula se representan los ángulos opuestos respectivos.

## 2. CONSTRUCCIÓN TEÓRICA DEL ALGORITMO DEL PROGRAMA TRES

El programa TRES (Trigonometría – Esférica) se decidió elaborarlo en primer lugar para evitar los cálculos sistemáticos cada vez que había que proponer problemas tipo a nuestros alumnos y que estos problemas fueran lo más eficaces para su aprendizaje, ya que de antemano se podía saber si el triángulo tenía una, dos o ninguna solución. Antes de empezar la realización del programa, se buscó si había algún producto equivalente en el mercado con estas características. Al no identificar ninguno, decidimos realizarlo nosotros, pensando que podría ayudar tanto a profesores como a alumnos. A estos últimos les permite plantearse la viabilidad de los mismos, tener la solución de forma inmediata y ver el proceso teórico a seguir.

La programación de la herramienta TRES está realizada siguiendo el proceso que se emplea para resolver manualmente estos tipos de problemas.

En primer lugar se validan las casillas que el usuario tiene que rellenar, es decir, se imponen las condiciones para que los valores de estas casillas sean correctos. Si no cumplen los requisitos, se mandan mensajes para que el usuario sepa el error que ha cometido al introducir los datos. Algunos de los mensajes que recibe el usuario son los siguientes:

- *"Faltan o sobran valores de entrada. Rellene tan solo tres datos"*
- *"Los valores introducidos deben pertenecer a tres datos"*
- *"Se deben introducir valores numéricos"*
- *"Valor fuera de rango. Debe estar comprendido entre 0° y 180°"*

El programa TRES resuelve dos tipos de problemas: la resolución de triángulos esféricos y el cálculo de la distancia esférica entre dos puntos de una esfera de radio conocido.

En primer lugar se expone el proceso para resolver triángulos esféricos, pudiéndose presentar los siguientes casos:

1. Se conoce tres lados.
2. Se conoce tres ángulos.
3. Se conoce dos lados y el ángulo comprendido.
4. Se conoce dos ángulos y el lado comprendido.
5. Se conoce dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos.
6. Se conoce dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos.

A continuación se explica el desarrollo teórico del código para cada caso:

### Caso 1 – Se conoce tres lados

Se comienza aplicando la función *Comprobar triángulo* para saber si verifica las condiciones matemáticas para la construcción de un triángulo esférico con los datos propuestos. Este caso es muy fácil de resolver, pues se aplica el teorema del coseno para lados tres veces y se obtienen los ángulos que buscamos.

### Caso 2 – Se conoce tres ángulos

Similar al anterior, lo único que cambia es la aplicación del teorema. En este caso se aplica el teorema del coseno para ángulos.

### Caso 3 – Se conoce dos lados y el ángulo comprendido entre ellos

En este caso hay tres posibilidades (abC, bcA, acB). En primer lugar se verifica si los datos de entrada cumplen los requisitos para la construcción de un triángulo esférico. El cálculo para la resolución de este tipo de triángulo se obtiene aplicando el teorema del coseno para lados tres veces.

### Caso 4 – Se conocen dos ángulos y el lado comprendido entre ellos

Igual que en el caso anterior, hay tres posibilidades (cAB, aBC, bAC). La resolución del triángulo se realiza aplicando tres veces el teorema del coseno para ángulos.

### Caso 5 – Se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos

Hay seis posibilidades (abA, abB, bcB, bcC, acA, acC). Es posible obtener dos soluciones válidas. Para calcular dichas soluciones se aplicarán los siguientes teoremas en el orden siguiente: teorema del seno (calcula el ángulo, el cual puede estar en el primer y segundo cuadrante, éste es el motivo por el que puede haber dos soluciones), analogía de Neper (calcula el lado/s que falta/n) y el teorema del coseno para ángulos (calcula el ángulo/s que falta/n), y siempre se termina estudiando la validez de las soluciones con la función *Comprobar triángulo*.

### Caso 6 – Se conocen dos ángulos y el lado opuesto a uno de ellos

Como en el caso anterior, también hay seis posibilidades (aAB, bAB, bBC, cBC, aAC, cAC). La resolución de este caso es análoga al Caso 5.

La segunda parte del programa TRES calcula la distancia esférica entre dos puntos de la esfera, conociendo la longitud y latitud de dichos puntos respecto al sistema de referencia dado. La programación de TRES se basa en la construcción de un triángulo cuyos vértices son el Polo Norte y los puntos dados, por lo que es fácil calcular los lados opuestos a los puntos conocidos; uno sería 90º ± Latitud de un punto dado (según Sur/Norte) y el otro lado 90º ± Latitud del otro punto (según Sur/Norte) y el ángulo **P**, ángulo que forman los meridianos de ambos puntos, se obtiene con la longitud de los dos puntos dados (Longitud de un punto ± la Longitud del segundo, según dirección Este/Oeste). El lado que falta es precisamente la distancia buscada y se obtiene aplicando el teorema del coseno para lados.

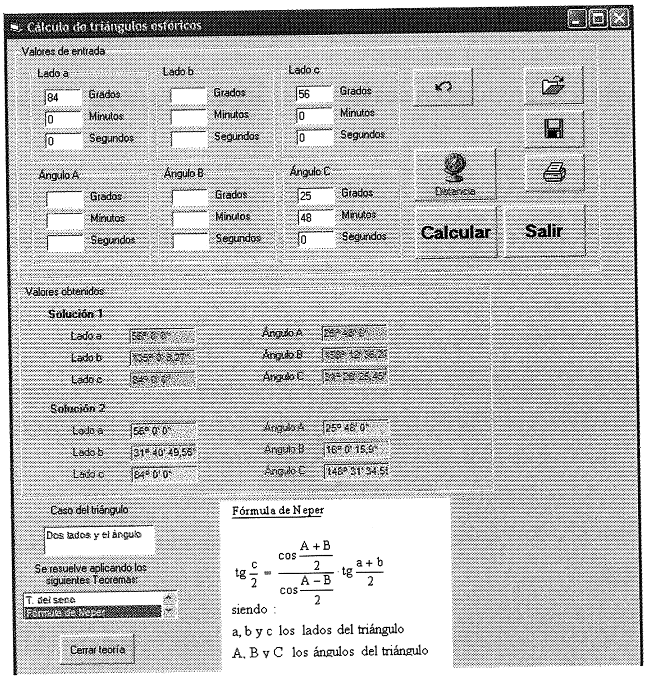
## 3. OTRAS CARACTERÍSTICAS DEL PROGRAMA TRES

En la parte inferior del formulario para el *Cálculo de triángulo esférico* hay unas casillas que indican el caso del triángulo que se ha introducido, así como los teoremas que hay que aplicar para su resolución. Al pulsar sobre cualquier teorema aparecerá el enunciado de éste.

Además, se puede *Guardar*, *Abrir* e *Imprimir* cualquier caso correspondiente, tanto para el *Cálculo de triángulos esféricos* como el de *Distancia esférica*.

## 4. DESCRIPCIÓN BÁSICA DEL FORMULARIO DEL PROGRAMA TRES

### 4.1. Pantalla formulario para la resolución de triángulos esféricos




El manejo tanto del formulario para el cálculo de triángulos esféricos como para calcular distancias entre dos puntos de la esfera es muy intuitivo, o eso se ha pretendido.

Fundamentalmente, el formulario consta de dos zonas: la parte superior, llamada *Valores de entrada*, donde aparecen casillas que representan los lados y los ángulos de un triángulo, de las cuales hay que rellenar tres elementos del triángulo. Además, aparecen los siguientes botones:

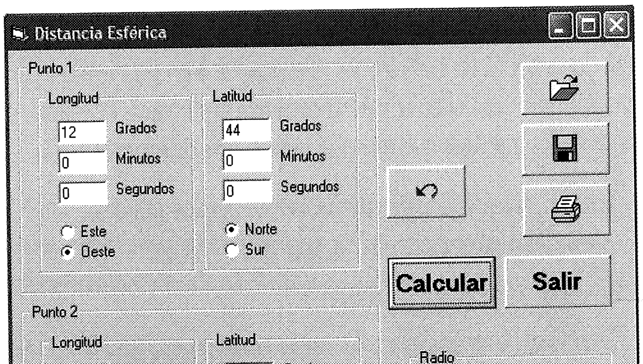
- *Calcular* sirve para la resolución del triángulo
- *Restablecer* permite poner todas las casillas en blanco
- *Distancia* sirve para entrar en el visor *Distancia esférica*
- *Salir* permite salir del programa.

La parte inferior, llamada *Valores obtenidos*, se divide a su vez en *Solución 1* y *Solución 2*, apareciendo unas casillas en las que es imposible que el usuario introduzca datos, ya que son resultados de la resolución del triángulo, en el caso de que tenga una solución o dos soluciones el problema.

También se pueden observar los botones siguientes:

- *Guardar*, por si se quiere archivar la resolución de algún triángulo realizado
- *Abrir*, para recuperar el archivo que se ha guardado anteriormente
- *Imprimir*, para imprimir la resolución de algún triángulo realizado.

### 4.2. Descripción del formulario *Distancia esférica*




La pantalla contiene dos zonas de entrada de datos para dar las coordenadas de los puntos y es donde el usuario tiene que escribir la longitud y latitud de ambos puntos. Además, se tiene que marcar su orientación en sentido de su longitud y de su latitud en ambos puntos. También el usuario debe escribir el radio de la esfera de referencia.

Los botones que dispone esta pantalla son los siguientes:

- *Calcular:* Al pulsarlo calcula la distancia entre los dos puntos en la esfera de referencia que se ha introducido
- *Restablecer:* Pone todas las casillas en blanco
- *Ocultar:* Pasa a la pantalla *Cálculo de triángulos*
- *Guardar:* Por si se quiere archivar la resolución de la distancia esférica de dos puntos
- *Abrir:* Para recuperar el archivo que se ha guardado anteriormente
- *Imprimir:* Para imprimir la resolución de la distancia esférica entre dos puntos que se haya realizado.

## 5. CONCLUSIONES

Se ha diseñado una herramienta cuyo uso es muy intuitivo y que está orientada fundamentalmente al autoaprendizaje de los alumnos, ya que mediante este programa se pueden generar, de forma rápida y sencilla, todo tipo de problemas-solución a elección del usuario.

El TRES se utiliza y puede ser utilizado, indistintamente, para el cálculo y para la generación de una amplia y variada gama de ejercicios para desarrollar en las clases prácticas en la asignatura de Matemáticas de primer curso de ingeniería.

Se puede obtener gratuitamente este programa en la siguiente dirección: **http://nivel.topografia.upm.es/~mates/software**

## 6. APÉNDICE

El leguaje utilizado para la programación del programa ha sido el Visual Basic 6.0. A continuación se muestra una parte del código, correspondiente a la resolución de un triángulo en el que se conocen sus tres lados (obsérvese que correspondería al caso 1).

```
Case "abc"
  entrada(0) = ((txt_valor(0) * 3600 + txt_valor(1) * 60 + txt_
  valor(2)) * pi) / 648000
  entrada(1) = ((txt_valor(3) * 3600 + txt_valor(4) * 60 + txt_
  valor(5)) * pi) / 648000
  entrada(2) = ((txt_valor(6) * 3600 + txt_valor(7) * 60 + txt_
  valor(8)) * pi) / 648000

  txt_solucion(4).Text = radianes_grados(Th_coseno_lados
  (entrada(1), entrada(0), entrada(2)))
  txt_solucion(3).Text = radianes_grados(Th_coseno_lados
  (entrada(0), entrada(1), entrada(2)))
  txt_solucion(5).Text = radianes_grados(Th_coseno_lados
  (entrada(2), entrada(0), entrada(1)))
  txt_solucion(0).Text = radianes_grados(entrada(0))
  txt_solucion(1).Text = radianes_grados(entrada(1))
  txt_solucion(2).Text = radianes_grados(entrada(2))

  If Not comprobar(grados_radianes(txt_solucion(3)), grados_
  radianes(txt_solucion(4)), grados_radianes(txt_solucion(5)),
grados_radianes(txt_solucion(0)), grados_radianes(txt_solucion(1)),
grados_radianes(txt_solucion(2))) Then
  For contador = 0 To 5
    txt_solucion(contador).Text = ""
  Next contador
  MsgBox "El triángulo no es posible"
End If
```

*Explicación de la notación del código*

txt_valor (i) : datos de entrada en sexagesimales.
entrada(i): variable pasa los datos de entrada a radianes.
txt_solucion: datos de salida en sexagesimales.

Las funciones utilizadas en esta parte del código son las siguientes:

*Teorema del coseno para lados:*

```
Function Th_coseno_lados(ByVal lado_a, lado_b, lado_c As Double)
As Double
cos_ang = (Cos(lado_a) - (Cos(lado_b) * Cos(lado_c))) / (Sin(lado_b)
* Sin(lado_c))
Th_coseno_lados = Atn(-(cos_ang) / Sqr(-cos_ang * cos_ang + 1)) +
2 * Atn(1)

  End sub
```

*Función que permite pasar de radianes a grados:*

```
Function radianes_grados(ByVal radianes As Double) As String
  Dim grados, minutos As Integer
  Dim segundos As Double
  Dim angulo As Double
  angulo = Round(radianes * 180 / pi, 6)
  grados = Int(angulo)
  angulo = (angulo - grados) * 60
  minutos = Int(angulo)
  angulo = (angulo - minutos) * 60
  segundos = Round(angulo, 2)

 radianes_grados = CStr(grados) + "º " + CStr(minutos) + "'
" + CStr(segundos) + """"
End Function
```

Equivalente sería la función que permite pasar de grados a radianes.

## 7. BIBLIOGRAFÍA


- Unidad Docente de Matemáticas (2003): *"Apuntes de Trigonometría esférica"*. Escuela de Topografía de Madrid.
- Ayres, F. (1980): *"Trigonometría Plana y Esférica"*. SCHAUM.
- Vila, A.: *"Elementos de Trigonometría Esférica"*. Universidad Politécnica de Cataluña.
- García Ardura, M.: *"Ejercicios y problemas de Trigonometría rectilínea y esférica"*. Universidad de Cádiz. ■