Programa TGP para la enseñanza de las transformaciones geométricas en el plano

José Fábrega, Mª Carmen Morillo
Departamento de Ingeniería Topográfica y Cartografía.
Universidad Politécnica de Madrid
jose.fabrega@upm.es , mariadelcarmen.morillo@upm.es

Abstract

We present the methodology we used in the development of a program that classifies geometric transformations in the euclidean plane and calculates all the characteristic elements of them or, vice versa, from these elements constructs the transformation matrix which calculates the image of any point of the plane.

Resumen

Presentamos la metodología utilizada en el desarrollo de un programa que permite clasificar transformaciones geométricas en el plano euclídeo y obtener sus elementos característicos o, viceversa, construir a partir de dichos elementos la matriz de la transformación que permite calcular la imagen de cualquier punto del plano.

Introducción

El artículo que se expone constituye un trabajo más en la línea de "hacer matemáticas con ordenador" que está produciendo cambios importantes y positivos en la enseñanza de las matemáticas. El objetivo fundamental del trabajo es describir un programa que permite clasificar y calcular los elementos característicos de una transformación geométrica del plano y viceversa (obtener la ecuación matricial a partir de los elementos característicos). Este programa está diseñado para la enseñanza de las matemáticas.

El programa se diseñó para que pudiera utilizarse tanto en las aulas como en casa de los alumnos, por lo que pensamos que debería funcionar como un programa autónomo en el entorno de Windows de Microsoft. Y por ello, aunque en las aulas utilizamos Derive™, el programa lo desarrollamos en Visual Basic. Esto nos obligó a desarrollar todas las funciones de cálculo y a solucionar una serie de problemas que se describirán más adelante.

Consideramos necesario recordar los conceptos siguientes:

- Transformación geométrica (T): como una aplicación biyectiva que hace corresponder a cada punto otro punto. Siendo las más usuales las traslaciones, giros, simetrías, homotecias y semejanzas.
- Isometría o movimiento: es toda transformación geométrica que conserva las distancias.

El programa TGP que presentamos tiene dos partes. En la primera, se conoce la ecuación matricial para clasificar la transformación y obtener esos elementos que la definen (centro y ángulo de giro, eje de simetría, vector de traslación, etc.). En la segunda parte se construye la matriz de la transformación partiendo de dichos elementos.

Tanto el programa como el método de trabajo seguido se han diseñado especialmente para la didáctica de las Matemáticas, más que por su eficiencia en el cálculo.

1 Clasificación de las transformaciones

Como hemos dicho anteriormente, partimos del conocimiento de la ecuación matricial. La matriz que define la transformación en la forma X' = N·X la llamamos N, siendo $N = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$.

La matriz $M = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ define la transformación de V_2 (espacio vectorial de dimensión 2) asociada a la transformación geométrica. Sabemos que si la transformación es una isometría o movimiento, entonces la matriz M es ortogonal y se caracteriza por cumplir que $M^{-1} = M^t$ y su determinante es ± 1.

En primer lugar comprobaremos si la matriz M es ortogonal. Si lo es, se calcula el determinante de M para conocer si el movimiento es directo o inverso.

- Si det(M)=1 se trata de un movimiento directo, transformación que conserva la orientación de las figuras. En el plano, los movimientos directos son la identidad, la traslación y el giro. La distinción entre estos movimientos se hará al calcular los elementos que los caracterizan.
- Si det(M)=-1 se trata de un movimiento inverso, en el que no se conserva la orientación de las figuras. Los movimientos inversos en el plano son la simetría axial y la simetría deslizante. La distinción entre una y otra simetrías se hará al calcular los elementos que las caracterizan.

Si ocurre que M no es ortogonal, la transformación no es movimiento. Se estudia entonces si se trata de una homotecia o una semejanza. Para ello se calcula $k=\sqrt{|\det(M)|}$ y se define una nueva matriz $Q=\frac{1}{k}M$, procediéndose a clasificar la transformación de la siguiente forma, siempre que la matriz Q sea ortogonal:

- Si $Q=I_2$ se trata de una homotecia de razón positiva.
- Si $Q=(-1)I_2$ se trata de una homotecia de razón negativa.
- Si Q es ortogonal y det(Q)=1, se trata de una semejanza directa.
- Si Q es ortogonal y det(Q)=-1, se trata de una semejanza inversa.

Cualquier otro caso no clasificado anteriormente, corresponderá a una transformación afín general del plano.

Para obtener los elementos característicos de estas últimas transformaciones se procede de la siguiente forma:

- Se parte de los puntos O=(0,0), I=(1,0) y J=(0,1) y se obtienen, mediante la ecuación matricial X'=N·X, los transformados del origen O'=T(0,0) y los puntos I'=T(1,0) y J'=T(0,1).

- Se calculan los siguientes elementos

  - Traslación del origen $\vec{i}=\overrightarrow{OO'}=(t_x, t_y)$

- Escala según el eje x: $e_x = |\overrightarrow{O'I'}|$
- Escala según el eje y: $e_y = |\overrightarrow{O'J'}|$
- Rotación del eje x: α_x a partir de $\overrightarrow{OI} \wedge \overrightarrow{O'I'}$
- Rotación del eje y: α_y a partir de $\overrightarrow{OJ} \wedge \overrightarrow{O'J'}$

Éstos son los que caracterizan una transformación afín. Teniendo en cuenta que se consideran las escalas siempre positivas, serán los ángulos los que indiquen si las transformaciones son directas o inversas.

Llegados a este punto cabe preguntarse si podía haber sido un método de trabajo adecuado partir de la transformación más general para luego ir particularizando. Por ejemplo, si $\alpha_x = \alpha_y$ y $e_x = e_y$, se trata de una transformación de semejanza directa de razón e_x. Si, además, $e_x = 1$, se trata de un movimiento directo. Y así sucesivamente.

Efectivamente, éste puede ser un método de trabajo para resolver el problema. Sin embargo, nos parece más adecuado desde el punto de vista didáctico obrar como se describe en el artículo, partiendo de los movimientos, que son las transformaciones más sencillas y las que el alumno mejor reconoce, para resolver después las más complejas y generales.

2 Obtención de los elementos característicos de las transformaciones geométricas

En el caso de los movimientos, los elementos característicos de una transformación geométrica vienen dados por el subespacio afín de sus puntos invariantes. Estos puntos invariantes se obtienen resolviendo la ecuación matricial N·X=X, siendo N la matriz que define el movimiento y X un punto genérico del plano afín euclídeo de dimensión dos (E_2). Expresando dicha ecuación como un sistema de ecuaciones lineales de dos ecuaciones con dos incógnitas, es decir:

$$\begin{cases} a_{21} + (a_{22} - 1)x + a_{23}y = 0 \\ a_{31} + a_{32}x + (a_{33} - 1)y = 0 \end{cases}$$

Se estudia la solución aplicando el teorema de Rouché-Frobenius a partir de los rangos de las matrices de coeficientes, $A = (M - I_2)$, y ampliada

$$A^* = \begin{pmatrix} a_{21} & a_{22} - 1 & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - 1 \end{pmatrix}$$

Se presentan entonces los siguientes casos:

A) Si rg(A)≠rg(A*), el sistema es incompatible, luego no hay puntos invariantes.

- Si rg(A)=0, lo que implica que $M = I_2$, rg(A*) = 1, se trata de una traslación, puesto que entonces la ecuación matricial del movimiento es $\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 1 & 0 \\ a_{31} & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x + a_{21} \\ y' = y + a_{31} \end{cases}$

  de donde se deduce que $\vec{v} = (a_{21}, a_{31})$ es el vector de la traslación.

- Si rg(A)=1 y rg(A*)=2, se trata de una simetría deslizante. Movimiento que es composición de una simetría axial con una traslación.

  Para calcular el eje de simetría y el vector de la traslación, se hace el siguiente razonamiento: como el punto O'=(a_{21},a_{31}) es el transformado del origen de coordenadas O=(0,0), el punto $P = \left(\frac{a_{21}}{2}, \frac{a_{31}}{2} \right)$, que es un punto equidistante de O y O', tendrá que pertenecer al eje de simetría. El transformado de P será el punto P'calculado por P'=N·P. Como el punto P es del eje de simetría, es invariante por la simetría y sólo quedará afectado por la traslación, por lo que el vector de traslación será $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$. El eje queda definido por el punto P y el vector director $\vec{v} = \overrightarrow{PP'}$.

B) Si rg(A)=rg(A*), el sistema es compatible, luego hay puntos invariantes.

- Si rg(A) = rg(A*) = 0 el sistema es compatible indeterminado, donde todos los puntos del plano son invariantes. El movimiento es la identidad.

- Si rg(A) = rg(A*) = 1. El sistema es compatible indeterminado. Se puede tomar como solución una cualquiera de las ecuaciones del sistema y dicha ecuación es el eje de simetría.

- Si rg(A) = rg(A*) = 2. El sistema es compatible determinado. Tiene una solución única. El movimiento es un giro. La solución del sistema es el centro de rotación. Si se trata de un giro, como la matriz M contiene en columnas los vectores transformados de los vectores directores de los ejes coordenados, la matriz se puede ver como $M = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$, lo que permite calcular el ángulo de rotación.

En los casos de homotecias y semejanzas se procede de la siguiente forma. Para cualquiera de las homotecias, la razón es k o -k y para obtener el centro (punto invariante) se resuelve la ecuación matricial $(N-I_2)\cdot X = 0$

La semejanza directa es el producto de una homotecia por un giro. La razón de la semejanza es k, el centro el punto invariante resultado de $(N-I_2)\cdot X = 0$ y el ángulo α se obtiene a partir de la matriz Q, la cual tiene la forma de la matriz de un giro $Q = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -sen\alpha \\ sen\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$

La semejanza inversa es el producto de una homotecia por una simetría axial. La razón de la semejanza es k, el centro el punto invariante resultado de $(N-I_2)\cdot X = 0$ y eje de simetría es aquel que pasa por el centro y tiene como vector director el que se obtiene de la ecuación $Q\cdot \vec{u} = \vec{u}$, correspondiendo ésta ecuación a un sistema homogéneo donde $rg(Q-I_2) = 1$ por ser Q la matriz de una simetría del espacio vectorial V_2.

3 Obtención de la ecuación matricial de una transformación geométrica

En primer lugar se indica qué tipo de transformación se quiere construir y cuáles son los elementos que la definen. Y como resultado se obtiene la ecuación matricial de la misma. En este caso, por motivos didácticos, se ha preferido expresar la transformación en la forma X'=C'+A(X-C). Siendo C un punto del plano afín y C' su homólogo; $X=\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ el punto genérico del plano y $X'=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ su transformado.

A continuación se expone la forma de operar en cada uno de los casos.

- Traslación

  El dato de partida es el vector de traslación $\vec{v}=(v_x, v_y)$. Por tanto la ecuación matricial es: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} v_x \\ v_y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

- Giro

  Los datos de partida son el centro $C=(c_x, c_y)$ y el ángulo de rotación α. Como C es el punto invariante de la transformación, directamente se obtiene la ecuación matricial del giro:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-c_x \\ y-c_y \end{pmatrix}$$

- Simetría axial

  Partimos del eje de simetría en forma vectorial, luego conocemos un punto $P=(p_x, p_y)$ y el vector director. Entonces $\vec{v}=(v_x, v_y)$ la pendiente del eje se obtiene como $\alpha = \operatorname{arc\,tg}\dfrac{v_y}{v_x}$, y por ser P invariante, la ecuación matricial de la simetría vendrá expresada de la forma siguiente: $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} \cos\alpha & \operatorname{sen}\alpha \\ \operatorname{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x-p_x \\ y-p_y \end{pmatrix}$

- Simetría deslizante.

  Los datos de partida son el eje de simetría y el vector de traslación. $\vec{v}=(v_x, v_y)$ paralelo a él. La pendiente del eje es $\alpha = \text{arc tg}\,\frac{v_y}{v_x}$ quedando:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos\alpha & \text{sen}\alpha \\ \text{sen}\alpha & -\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix}$$

- Homotecia

  Conocemos el centro de la homotecia $C=(c_x, c_y)$, punto invariante de la transformación, y la razón k. Obteniéndose la ecuación:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix}$$

- Semejanza directa

  El punto de partida es el centro de la semejanza $C=(c_x, c_y)$, que es punto invariante, el ángulo de giro α y la razón k. Luego la ecuación es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_x \\ c_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & -k\text{sen}\alpha \\ k\text{sen}\alpha & k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - c_x \\ y - c_y \end{pmatrix}$$

- Semejanza inversa

  Los datos de partida son el eje de simetría, dado por un punto $P=(p_x, p_y)$ y el vector director $\vec{v}=(v_x, v_y)$, además de la razón de semejanza k. La ecuación matricial resultante es:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} k\cos\alpha & k\text{sen}\alpha \\ k\text{sen}\alpha & -k\cos\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x - p_x \\ y - p_y \end{pmatrix}$$

  siendo $\alpha = \text{arc tg}\,\frac{v_y}{v_x}$

4. Descripción básica del visor del programa TGP

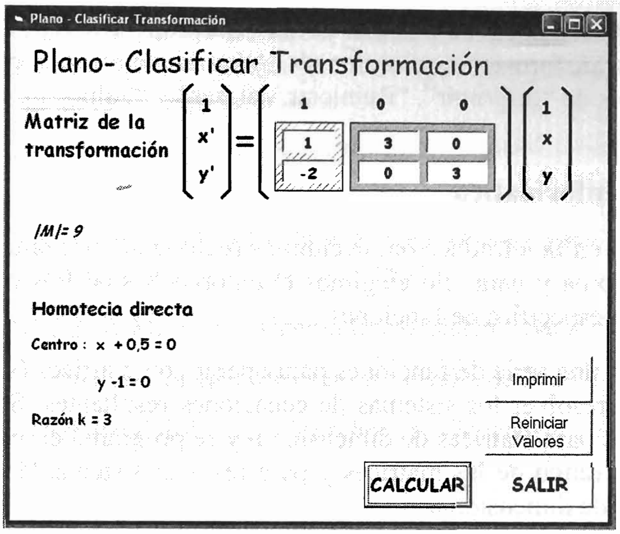
La pantalla de inicio llamada "*Transformaciones geométricas*" tiene dos opciones:

1. Clasificar Transformación.
2. Obtener ecuación.

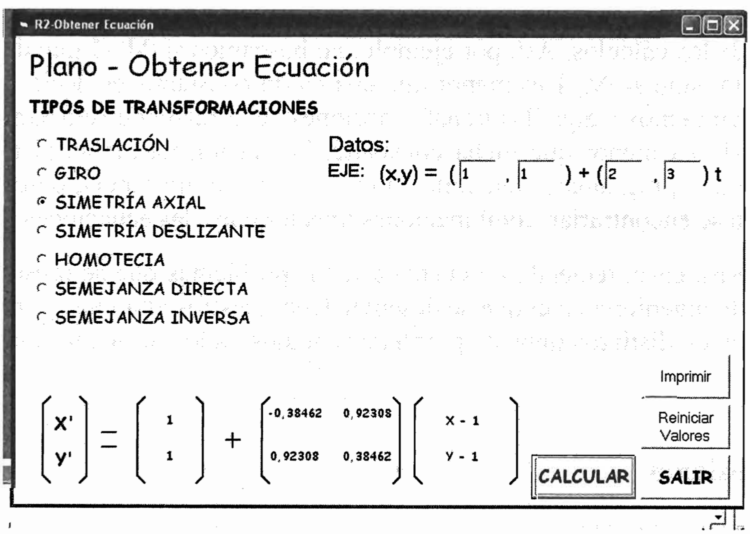
Se selecciona la opción y a continuación se pulsa el botón "Aceptar". Aparece una nueva pantalla correspondiente a "Clasificar Transformación" u "Obtener ecuación". Además, se tiene el botón "Salir" para cerrar el programa.

La pantalla "*Clasificar Transformación*" es de manejo es muy intuitivo. Se introduce en la matriz de la transformación los datos. A continuación se pulsa el botón "Calcular" y el programa genera el valor del determinante, tipo de transformación, así como sus elementos característicos. Además aparecen los siguientes botones:

- "Imprimir" (imprime la pantalla)
- "Reiniciar Valores" (vuelve a poner la matriz transformación con los valores preestablecidos)
- "Salir" (vuelve a la pantalla anterior).



Pantalla "*Obtener Ecuación*":



En esta pantalla aparecen los tipos de transformaciones. Según la transformación seleccionada aparecen sus elementos característicos. Una vez introducidos los datos de dichos elementos se pulsa el botón “Calcular” y se obtiene la ecuación matricial de la transformación seleccionada. Además, como en la pantalla anterior están los botones de “Imprimir”, “Reiniciar Valores” y “Salir”.

6 Desarrollo informático

Como se indicó en la introducción, decidimos realizar un programa que trabajase de forma autónoma y para ello elegimos el entorno Visual Basic v6 sin utilizar ninguna librería específica de funciones.

Se diseñaron una serie de funciones para operar con matrices (suma, producto, inversa, etc.) y resolver los sistemas de ecuaciones resultantes. Se hicieron funciones genéricas para matrices de dimensión n y se programó el método de Gauss para calcular el rango de las matrices y para resolver sistemas de ecuaciones lineales, también de dimensión n.

Lo más importante que hay que mencionar en el diseño de estas funciones es que no se pueden utilizar los operadores de comparación de Visual Basic, especialmente el “=” puesto que dada la forma representación interna de las variables de tipo “doble precisión” en los ordenadores siempre hay que tener en cuenta la precisión de los cálculos. Así, por ejemplo, no buscamos si $|M|=1$ que definiría un movimiento, sino si $|M|-1$ es menor que una cierta constante, es decir, consideraremos movimientos a aquellas transformaciones cuya razón de semejanza k cumpla que $k-1$ sea menor que dicha constante. Por la misma razón, el método de Gauss hay que programarlo teniendo en cuenta esta circunstancia, porque de otra manera, no se encontrarían combinaciones lineales entre las ecuaciones.

En nuestro caso, teniendo en cuenta que los problemas que se presentan en el campo de la ingeniería en el que se desenvuelven nuestros alumnos, y tras calibrar el programa en distintos tipos de problemas, hemos dado a esta constante el valor de 10^{-8}.

7 Conclusiones

Se ha diseñado una herramienta cuyo uso es muy intuitivo, y que está orientada fundamentalmente al autoaprendizaje de los alumnos ya que mediante este programa se pueden generar de forma rápida y sencilla todo tipo de problemas-solución, a elección del usuario.

El TGP se utiliza y puede ser utilizado, indistintamente, para el cálculo y para la generación de una amplia y variada gama de ejercicios para desarrollar en las clases prácticas en nuestra asignatura.

Bibliografía

UNIDAD DOCENTE DE MATEMÁTICAS: "*Transformaciones geométricas del espacio euclídeo*". Escuela de Topografía, 1997.

DÍAZ HERNÁNDEZ, A.M. et al: "Álgebra lineal básica". Sanz y Torres, 2002

GOLOVINA, L.: "*Álgebra lineal y algunas de sus aplicaciones*". Mir, 1980.

HERNÁNDEZ RODRÍGUEZ, E.: *"Álgebra y Geometría.* Addison-Wesley, 1994.